Демулена [2].

Список литературы

1. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. "Тр.геом.семин. ВИНИТИ АН СССР", 1974, 6, с. 113-133.

2. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. ОНТИ, М.-Л., 1937.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Е.А. Митрофанова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуется конгруэнция M_2^1 гиперболических параболоидов, у которых на каждом параболоиде Q существует прямолинейная образующая ℓ_1, являющаяся фокальным многообразием параболоида Q [1]. Показано, что параболоиды Q конгруэнции M_2^1 огибают линейчатую поверхность S вдоль их общих прямолинейных образующих ℓ.

Определение 1. Конгруэнцией M_2^1 называется конгруэнция гиперболических параболоидов Q в трехмерном эквиаффинном пространстве A_3, обладающая следующим свойством: на каждом параболоиде $Q \in M_2^1$ существует прямолинейная образующая ℓ_1, являющаяся фокальной прямой [1] параболоида Q.

Теорема 1. Конгруэнции M_2^1 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Доказательство. Отнесем конгруэнцию M_2^1 к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, поместив вершину A на прямую ℓ_1, направив векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ по прямолинейным образующим ℓ_1, ℓ_2

гиперболического параболоида Q, а вектор $\bar{e}_3$ – по его диаметру.

При надлежащей нормировке векторов $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ репера R уравнение параболоида Q запишется в виде:

$$F \equiv x^1 x^2 - x^3 = 0. \tag{1}$$

Имеем

$$dF = -(x^1)^2\omega_1^2 - (x^2)^2\omega_2^1 - x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2) + x^3\omega_3^3 - \tag{2}$$
$$-x^3(x^1\theta^2 + x^2\theta^1) + x^1(\omega_1^3 - \omega^2) + x^2(\omega_2^3 - \omega^1) + \omega^3,$$

где ω^α, ω_α^β – компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha, \ \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{3}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{4}$$

Так как прямая ℓ_1 является фокальной прямой параболоида $Q \in M_2^1$, то при $x^2=0$, $x^3=0$ dF обращается в ноль. Система пфаффовых уравнений приводится к виду:

$$\omega_1^2 = 0, \ \omega_1^3 - \omega^2 = 0, \ \omega^3 = 0. \tag{5}$$

Замыкая систему (5), получим

$$\omega^2 \wedge \omega_3^2 = 0, \ \omega_3^3 \wedge \omega^2 = 0, \ (\omega^1 - \omega_2^3) \wedge \omega^2 = 0, \tag{6}$$

причем

$$\omega^2 \neq 0. \tag{7}$$

Продолжая систему (6), находим:

$$\omega_3^2 = a\omega^2, \ \omega_3^3 = b\omega^2, \ \omega^1 - \omega_2^3 = c\omega^2, \tag{8}$$

$$\Delta a \wedge \omega^2 = 0, \ \Delta b \wedge \omega^2 = 0, \ \Delta c \wedge \omega^2 = 0, \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= da + a(2\omega_2^2 - \omega_3^3), \\ \Delta b &= db - b\omega_2^2 - \omega_3^1 + a\omega_2^3, \\ \Delta c &= dc + c(\omega_3^3 - 2\omega_2^2) + 2b\omega_1^1 + 2\omega_2^1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Система (5), (8) в инволюции и определяет конгруэнцию M_2^1 с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Прямолинейная конгруэнция (ℓ_1) вырождается в линейчатую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$d\bar{A} = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2, \ d\bar{e}_1 = \omega_1^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_3, \tag{11}$$

то ранг системы структурных форм прямой ℓ_1 равен единице (единственная структурная форма ω^2). Поэтому (ℓ_1) – линейчатая поверхность.

Т е о р е м а 3. Конгруэнция M_2 гиперболических параболоидов Q тогда и только тогда является конгруэнцией M_2^1, когда существует линейчатая поверхность S, которую огибают гиперболические параболоиды Q, причем в каждой точке $A \in S$ параболоид Q и линейчатая поверхность S касаются друг друга вдоль общей образующей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Из (11) следует, что касательной плоскостью к линейчатой поверхности S в точке A является плоскость $x^3=0$. В силу (1) эта плоскость касается также гиперболического параболоида Q, причем прямая ℓ_1 является их общей прямолинейной образующей.

Достаточность. Пусть существует линейчатая поверхность S такая, что конгруэнция M_2 образована гиперболическими параболоидами Q, касающимися поверхности S вдоль общих прямолинейных образующих. Отнесем конгруэнцию M_2 к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где $A\in\ell_1$, вектор $\bar{e}_1$ направлен по общей прямолинейной образующей параболоида Q и линейчатой поверхности S, вектор $\bar{e}_2$ -по второй прямолинейной образующей параболоида Q, проходящей через точку A, вектор $\bar{e}_3$ -по диаметру параболоида Q, уравнение параболоида Q при надлежащей нормировке векторов $\bar{e}_\alpha$ приводится к виду (1), а пфаффовы уравнения линейчатой поверхности S имеют вид:

$$\omega^3=0,\ \omega_1^2=\alpha\omega^2,\ \omega_1^3=\beta\omega^2. \qquad (12)$$

Продолжая систему (12), находим:

$$\begin{aligned}\delta\alpha&=\alpha\pi_1^1-\alpha^2\pi^1-\beta\pi_3^2,\\ \delta\beta&=-\beta\alpha\pi^1-2\beta\pi_3^3-\alpha\pi_2^3.\end{aligned} \qquad (13)$$

Фиксируем оставшиеся вторичные параметры так, чтобы

$$\alpha=0,\ \beta=1. \qquad (14)$$

Уравнения (12) приводятся к виду (5) и определяют конгруэнцию M_2^1.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.7, Калининград, 1976, 54-60.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Ю.И.Попов

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ МНОГОМЕРНОЙ РАСПАДАЮЩЕЙСЯ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей работе инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [1] строятся поля геометрических объектов в окрестностях второго и третьего порядков элемента m-мерной распадающейся гиперполосы RH_m^τ [2],[3] ранга τ проективного пространства P_n ($\tau<m<n$). Для распадающейся гиперполосы RH_m^τ построен внутренний инвариантный репер третьего порядка, как с помощью первой пары нормальных квазитензоров (§2), так и с помощью второй пары нормальных квазитензоров (§4). Дана геометрическая интерпретация некоторых геометрических оснащающих объектов гиперполосы RH_m^τ. В общем случае найдено поле двупараметрической связки соприкасающихся гиперквадрик, внутренним инвариантным образом присоединенных к исследуемой гиперполосе RH_m^τ.

Обозначения и замечания:

1^0. Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$$p,q,t,f,\ldots=1,2,\ldots,\tau;\quad i,j,k,\ell,s,\ldots=\tau+1,\ldots,m;$$